Capítulo 1. Números y funciones. Continuidad y límite funcional

Números reales: propiedades algebraicas, desigualdades.

Como todos sabéis se distinguen distintas clases de números:

Los números naturales 1,2,3,... . El conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{N}$.

Los números enteros ...,-2,-1,0,1,2,... cuyo conjunto se representa por $\mathbb{Z}$.

Los números racionales que son cocientes de la forma p/q donde $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}$, cuyo conjunto representamos por $\mathbb{Q}$.

También conocéis otros números como $\sqrt{2}$, π, o el número e que no son números racionales y que se llaman, con una expresión no demasiado afortunada, "números irracionales". Pues bien, el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales se llama conjunto de los números reales y se representa por $\mathbb{R}$.

Es claro que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Aunque los números que no son racionales pueden parecer un poco raros, no merece la pena, al menos por ahora, preocuparse por cómo son estos números; sino que lo realmente interesante es aprender a trabajar con ellos. Lo interesante del número $\sqrt{2}$ es que su cuadrado es igual a 2.

Pues bien, una de las cosas más llamativas de los números es que a partir de un pequeño grupo de propiedades pueden deducirse casi todas las demás. Vamos a destacar estas propiedades básicas que, naturalmente, hacen referencia a las dos operaciones fundamentales que se pueden hacer con los números: la suma y el producto. La suma de dos números reales x,y se escribe $x+y$, representándose el producto por xy. Las propiedades básicas a que nos referimos son las siguientes.

P1 [Propiedades asociativas] $(x+y)+z = x+(y+z)$; $(xy)z = x(yz)$ para todos x,y,z en $\mathbb{R}$.

P2 [Propiedades conmutativas] $x+y = y+x$; $xy = yx$ para todos x,y en $\mathbb{R}$.

P3 [Elementos neutros] El 0 y el 1 son tan importantes que enunciamos seguidamente sus propiedades:

$$0+x = x \quad ; \quad 1x = x \quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

P4 [Elementos opuesto e inverso] Para cada número real x hay un número real llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x$, tal que $x+(-x)=0$.
Para cada número real x distinto de 0, $x \neq 0$, hay un número real llamado *inverso de* x, que representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1}=1$.
P5 [Propiedad distributiva] $(x+y)z = xz+yz$ para todos x,y,z en $\mathbb{R}$.

Las propiedades anteriores son de tipo algebraico y, aunque son muy sencillas, a partir de ellas pueden *probarse* cosas tan familiares como que $0x=0$, o que $(-x)y=-(xy)$.

Pero los números tienen, además de las propiedades algebraicas, otras propiedades que suelen llamarse *propiedades de orden*. Como todos sabemos, los números suelen representarse como puntos de una recta en la que se fija un origen, el 0, de forma arbitraria. Los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. Las propiedades básicas del orden son las siguientes.

P6 [Ley de tricotomía] Para cada número real x se verifica que o bien es $x=0$, o bien x es positivo, o bien su opuesto $-x$ es positivo.

P7 [Estabilidad de $\mathbb{R}^+$] La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Suele escribirse $x-y$ en vez de $x+(-y)$. También, supuesto $y\neq 0$, se escribe x/y o $\frac{x}{y}$ en vez de xy^{-1}. Los opuestos de los números positivos, es decir los elementos del conjunto $\mathbb{R}^- = \{-x : x\in\mathbb{R}^+\}$, se llaman *números negativos*. Nótese que el 0 no es positivo ni negativo.
Para $x,y\in\mathbb{R}$ escribimos $x<y$ (léase x *es menor que* y) o $y>x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y-x\in\mathbb{R}^+$, y escribimos $x\leqslant y$ o $y\geqslant x$ para indicar que $y-x\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}^+_o = \mathbb{R}^+\cup\{0\}$, $\mathbb{R}^-_o = \mathbb{R}^-\cup\{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Nótese que si $x\in\mathbb{R}^-$ entonces $-x\in\mathbb{R}^+$.

Reglas para trabajar con desigualdades.
Sean x,y,z números reales, entonces:
i) $x\leqslant y$ e $y\leqslant z$ implican que $x\leqslant z$.
ii) $x\leqslant y$ e $y\leqslant x$ implican que $x=y$.
iii) Se verifica exactamente una de las tres relaciones: $x<y$, $x=y$, o $y<x$.

iv) $x < y$ implica que $x + z < y + z$.

v) $x < y$, $z > 0$ implican que $xz < yz$.

vi) $x < y$, $z < 0$ implican que $xz > yz$.

vii) $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$ y, en particular, $1 > 0$.

viii) $z > 0$ implica que $\dfrac{1}{z} > 0$.

ix) Supuesto que x e y son los dos positivos o los dos negativos, se verifica que $x < y$ implica que $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

Recordemos que el **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Para trabajar con valores absolutos es útil recordar que dado $x \in \mathbb{R}_o^+$, representamos por $\sqrt{x}$ al único número *mayor o igual que cero* cuyo cuadrado es igual a x. Puesto que, evidentemente, $|x|^2 = x^2$ y, *además*, $|x| \geqslant 0$, se tiene que $|x| = \sqrt{x^2}$. La utilidad de esto deriva de la siguiente estrategia de procedimiento:

Dados $a, b \in \mathbb{R}_o^+$ para probar que $a = b$ es suficiente probar que $a^2 = b^2$ y para probar que $a < b$ es suficiente probar que $a^2 < b^2$.

Geométricamente, $|x|$ representa la distancia de x al origen, 0, en la recta real. De manera más general:

$$|x - y| = \text{distancia entre } x \text{ e } y$$

representa la longitud del segmento de extremos x e y.

Propiedades del valor absoluto.

Para $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

i) $|xy| = |x||y|$;

ii) $|x| \leqslant y$ es equivalente a $-y \leqslant x \leqslant y$;

iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$ **(desigualdad triangular)**;

iv) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

Principio de inducción matemática. Sea A un conjunto de números naturales, $A \subseteq \mathbb{N}$, y supongamos que:
i) $1 \in A$
ii) Siempre que un número n está en A se verifica que $n+1$ también está en A.
Entonces $A = \mathbb{N}$.

El Principio de Inducción Matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.
B) Comprobamos que si un número n satisface la propiedad, *entonces* también el número $n+1$ la satisface. Es decir comprobamos que si $P(n)$ es cierta, *entonces* también lo es $P(n+1)$.

Nótese que en B) no se dice que se tenga que probar que $P(n)$ es cierta, sino que hay que *demostrar la implicación lógica* $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Si definimos el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es cierta}\}$, entonces el punto A) nos dice que $1 \in A$, y el punto B) nos dice que siempre que n está en A se verifica que $n+1$ también está en A. Concluimos que $A = \mathbb{N}$, o sea, que $P(n)$ es cierta para todo número natural n.

Ejemplo 1
Para cada número natural n, sea $P(n)$ la proposición *si el producto de n números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual que n*. Demostraremos por inducción que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Trivialmente $P(1)$ es verdadera. Supongamos que $P(n)$ es verdadera. Consideremos $n+1$ números positivos no todos iguales a 1 cuyo producto sea igual a 1. En tal caso alguno de dichos números, llamémosle x_1, tiene que ser menor que 1 y otro, al que llamaremos x_2, tiene que ser mayor que 1. Notando $x_3, \cdots, x_{n+1}$ los restantes números se tiene que:

$$(x_1 x_2) x_3 \cdots x_n = 1$$

es decir, $x_1 x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}$ son n números positivos con producto igual a 1 por lo que:

$$x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \geqslant n \qquad (1)$$

y como $0 < (1-x_1)(x_2-1)$, tenemos que:

$$x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2 \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} > n+1$$

Hemos probado así que $P(n+1)$ es verdadera.

Consecuencia: Desigualdad de las medias.

Cualesquiera sean los números positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ se verifica que:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

y la igualdad se da si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Basta poner $G = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ y $x_i = \dfrac{a_i}{G}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, con lo cual $x_1x_2\cdots x_n = 1$ por lo que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n$ es decir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant nG$ y se da la igualdad solamente cuando $x_i = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$; es decir, cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ejemplo2

Pruébese que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad:

$$\sqrt{n} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}$$

El principio de inducción matemática puede aplicarse en muchas situaciones en las que, a primera vista, no aparecen para nada los números naturales. Por ejemplo, una proposición referente a todos los polinomios podría probarse por inducción sobre el grado del polinomio. Un teorema sobre matrices cuadradas podría probarse por inducción sobre el orden de la matriz.

Probaremos a continuación una útil igualdad algebraica conocida como *fórmula del binomio de Newton*.

Para establecer esta igualdad necesitamos definir los llamados *coeficientes binómicos*. Dados dos números enteros $n \geqslant k \geqslant 0$ se define:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donde

$$n! = \prod_{p=1}^{n} p$$

es decir, $n!$ es el producto de todos los números naturales menores o iguales que n. Se define también $0! = 1$.

La igualdad

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{1}$$

es de comprobación inmediata. A partir de ella se prueba fácilmente, por inducción sobre n, que $\binom{n}{k}$ es un número entero positivo. Lo que resulta evidente sin más que considerar el llamado *triángulo de Pascal*, en el cual $\binom{n}{k}$ es el número que figura en la fila n columna k.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

Fórmula del binomio de Newton Cualesquiera sean los números reales a, b y el número natural n se verifica que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Demostración

Para $n = 1$ la igualdad del enunciado es trivialmente verdadera. Supongamos que dicha igualdad se verifica para $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k =$$
$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

lo que prueba la validez de la igualdad para $n+1$. En virtud del principio de inducción, concluimos que la igualdad del enunciado es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. □

No hay que olvidar que el coeficiente binómico $\binom{n}{k}$ representa el número de subconjuntos distintos de k elementos que tiene un conjunto de n elementos.

Funciones reales

Las funciones son las herramientas principales para la descripción matemática de una situación real. Todas las *fórmulas* de la Física no son más que funciones: expresan cómo ciertas magnitudes (por ejemplo el volumen de un gas) dependen de otras (la temperatura y la presión). El concepto de función es tan importante que muchas ramas de la matemática moderna se caracterizan por el tipo de funciones que estudian. No es de extrañar, por ello, que el concepto de función sea de una gran generalidad. Además, se trata de uno de esos conceptos cuyo contenido esencial es fácil de comprender pero difícil de formalizar.

La idea básica de función es la siguiente. Supongamos que tenemos dos conjuntos A y B; una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un único elemento de B.*

En este curso estamos interesados principalmente en funciones entre conjuntos de números reales, es decir, A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$; con frecuencia $B = \mathbb{R}$. Estas funciones se llaman *funciones reales de una variable real*. En lo que sigue nos referiremos solamente a este tipo de funciones y, si no se especifica otra cosa, se entiende que $B = \mathbb{R}$. Por tanto, para darnos una función nos deben decir, en principio, el subconjunto A de $\mathbb{R}$ y la regla que asigna a cada número de A un único número real. El conjunto A recibe el nombre de *dominio* de la función.

Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena. Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por $f(x)$ (léase "f de x") el número que f asigna a x, que se llama *imagen de x por f . Es muy importante en este curso distinguir entre f (una función) y $f(x)$ (un número real).*

Es importante advertir que las propiedades de una función depende de la regla que la define *y también de su dominio*, por ello *dos funciones que tienen distintos dominios se consideran distintas funciones aunque la regla que las defina sea la misma.*

Criterio de igualdad para funciones. Dos funciones f y g son iguales cuando tienen igual dominio y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Notemos también que aunque estamos acostumbrados a representar a las funciones mediante *fórmulas*, no siempre es posible hacerlo.

El símbolo $f : A \to \mathbb{R}$ se utiliza para indicar que f es una función *cuyo dominio es A* (se supone, como hemos dicho antes, que A es un subconjunto de $\mathbb{R}$)

Veamos unos ejemplos sencillos.

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$.
b) Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2$.
c) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por: $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
d) Sea $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 6}{x^2 - 1}$

Según lo antes dicho, las funciones en a) y b) son distintas. Nótese que la función definida en b) es creciente y la definida en a) no lo es.

La función definida en c) es llamada *función de Dirichlet*. Nótese que no es fácil calcular los valores de dicha función porque no siempre se sabe si un número real dado es racional o irracional. ¿Es $e + \pi$ racional? Pese a ello la función está correctamente definida.

En d) no nos dan explícitamente el dominio de f por lo que se entiende que f está definida siempre que $f(x)$ tenga sentido, es decir, siempre que, $x^2 - 1 \neq 0$, esto es, para $x \pm 1$.

El convenio del dominio

Cuando una función se define mediante una fórmula $\boxed{f(x) = \text{fórmula}}$ y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de x para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real. Éste es el llamado *dominio natural* de la función. Si queremos restringir el dominio natural de alguna manera, entonces debemos decirlo de forma explícita.

Usaremos la notación $dom(f)$ para representar el dominio de una función f (dicho dominio puede ser el natural o un subconjunto del mismo). El conjunto de todos los valores que toma una función, $\{f(x) : x \in dom(f)\}$, suele llamarse *rango o recorrido de* f, o simplemente, *la imagen* de f y lo representaremos por $imagen(f)$.

Ocurre que el dominio natural de muchas funciones es un conjunto que está formado por la unión de varios *intervalos*. Recordemos el concepto de intervalo y cuántos tipos diferentes hay.

Definición. Un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Además de $\mathbb{R}$ y del Ø, hay los siguientes tipos de intervalos.

Intervalos que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leq b$ son números reales):

$$[a,b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \ ; \quad \text{(intervalo cerrado)}$$
$$]a,b[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \ ; \quad \text{(intervalo abierto)}$$
$$[a,b[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} \ ; \quad \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)}$$
$$]a,b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} \ ; \quad \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}$$

Intervalos que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$]-\infty, c[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x < c\} \ ; \quad \text{(semirrecta abierta a la izquierda)}$$
$$]-\infty, c] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} \ ; \quad \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)}$$
$$]c, +\infty[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x > c\} \ ; \quad \text{(semirrecta abierta a la derecha)}$$
$$[c, +\infty[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\} \ ; \quad \text{(semirrecta cerrada a la derecha)}$$

Como es la primera vez que aparecen, hay que decir que los símbolos $+\infty$ (léase: “más infinito”) y $-\infty$ (léase: “menos infinito"); son eso: símbolos. No son números. Cada vez que aparece uno de ellos en una situación determinada hay que recordar cómo se ha definido su significado para dicha situación. A veces, se escribe $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

La mayoría de las funciones que vamos a usar en este curso pertenecen a la clase de las *funciones elementales*. Se llaman así porque pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones bien conocidas realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Dadas dos funciones f y g se define su *función suma* (resp. *producto*) como la función que a cada número $x \in dom(f) \cap dom(g)$ asigna el número real $f(x) + g(x)$ (resp. $f(x)g(x)$). Dicha función se representa con el símbolo $f + g$ (resp. fg). Se define la función cociente de f por g como la función que a cada número $x \in dom(f) \cap dom(g)$ con $g(x) \neq 0$ asigna el número real $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dicha función se representa con el símbolo $\dfrac{f}{g}$. También podemos multiplicar una función f por un número α para obtener la función αf que asigna a cada $x \in dom(f)$ el número $\alpha f(x)$. De todas formas, el producto de un número por una función puede considerarse como un caso particular del producto de funciones, pues se identifica el número α con la *función constante* que toma como único valor α.

Las propiedades de la suma y el producto de funciones son las que cabe esperar y su demostración es inmediata pues se reducen a las correspondientes propiedades de los números.

Cualesquiera sean las funciones f, g y h se verifica:
Propiedades asociativas. $(f+g)+h = f+(g+h)$; $\quad (fg)h = f(gh)$
Propiedades conmutativas. $f+g = g+f$; $\quad fg = gf$
Propiedad distributiva. $(f+g)h = fh+gh$

Composición de funciones.
Supongamos que f y g son funciones verificando que $imagen(f) \subset dom(g)$. En tal caso, la función h dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in dom(f)$ se llama *composición de g con f* y se representa por $g \circ f$. La composición de funciones es asociativa, esto es

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$$

.

Funciones inyectivas.

Se dice que una función f es inyectiva en un conjunto $A \subseteq dom(f)$, si en puntos distintos de A toma valores distintos; es decir, $x,y \in A$ y $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en $dom(f)$.

La función inversa de una función inyectiva. Si f es una función inyectiva, puede definirse una nueva función $f^{-1}: imagen(f) \rightarrow \mathbb{R}$ que llamaremos *función inversa de* f, que a cada número $y \in imagen(f)$ asigna el único número $x \in dom(f)$ tal que $f(x) = y$. Equivalentemente $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in dom(f)$, y también $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in dom(f^{-1}) = imagen(f)$.

Funciones monótonas. Se dice que una función f es creciente (resp. decreciente) en un conjunto $A \subseteq dom(f)$, si f conserva (resp. invierte) el orden entre puntos de A, es decir, si $x,y \in A$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Se dice que f es creciente (resp. decreciente) cuando lo es en todo su dominio ($A = dom(f)$). Se dice que una función es *monótona* para indicar que es creciente o decreciente. Una función monótona e inyectiva se dice que es *estrictamente monótona*, pudiendo ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Gráfica de una función. La gráfica de una función f es el conjunto de pares de números $\{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$.

La gráfica de una función pone de manifiesto, a simple vista, muchas de sus propiedades. Para dibujar gráficas de funciones se precisan herramientas de cálculo que estudiaremos más adelante.

Funciones elementales: estudio descriptivo

Polinomios y funciones racionales

Notaremos I la función identidad, es decir, $I(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El producto de I consigo misma k veces se notará I^k. Mediante sumas y productos de las funciones constantes y de la identidad podemos obtener las *funciones polinómicas o polinomios*:

$$c_o + c_1 I + c_2 I^2 + \cdots + c_n I^n$$

donde $c_o, c_1, \dots, c_n$ son números llamados *coeficientes* del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, si $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio. Nótese que, llamando P al polinomio anterior, tenemos para todo número x la igualdad:

$$P(x) = c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

Mientras que la suma, el producto y la composición de funciones polinómicas es también una función polinómica, el cociente de funciones polinómica da lugar a las llamadas *funciones racionales*. Es decir, las funciones racionales son las que se obtienen a partir de las funciones constantes y de la identidad mediante sumas, productos y cocientes (las operaciones racionales: sumar, multiplicar y dividir). Una función racional típica es de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0. La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Nótese que las funciones polinómicas son también funciones racionales (con denominador constante 1).

Es inmediato que sumas, productos y cocientes de funciones racionales son también funciones racionales; y la composición de dos funciones racionales es también una función racional.

Raíces de un número. Dados un número real $x > 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real $z > 0$ que verifica que $z^k = x$. Dicho número real z se llama la **raiz k-ésima o de orden** k de x y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.

Además, si $y > 0$, se verifica que:

i) $x < y$ si, y sólo si, $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$,

ii) $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.

Si $x < 0$ y k es *impar* se define $\sqrt[k]{x} = -\sqrt[k]{|x|}$

Potencias racionales. Dados $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$. Notemos que $(\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$ pues

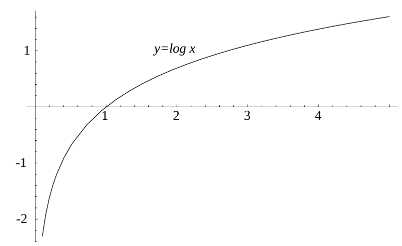
$$\big((\sqrt[q]{x})^p\big)^q = (\sqrt[q]{x})^{pq} = \big((\sqrt[q]{x})^q\big)^p = x^p.$$

Naturalmente, si $p/q = m/n$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces se comprueba fácilmente que $x^{p/q} = x^{m/n}$. En consecuencia, si r es un número racional podemos definir, sin ambigüedad alguna, la potencia x^r por $x^r = x^{p/q}$, donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ son tales que $r = p/q$.

Potencias reales y logaritmos. Vamos a hacer un estudio descriptivo de estas funciones. Nos limitaremos a recordar sus definiciones y propiedades básicas, dejando para más adelante un estudio riguroso de las mismas.

Dado un número $a > 0$, $a \neq 1$, y un número $x > 0$, se define el *logaritmo en base a de x* como el único número $y \in \mathbb{R}$ que verifica la igualdad $a^y = x$. El logaritmo en base a de x se representa por el símbolo $\log_a x$. Nótese que, por definición, para todo $x > 0$ es $a^{\log_a x} = x$.

El dominio de la función $\log_a$ es $\mathbb{R}^+$, y su imagen es $\mathbb{R}$. La función es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$. La propiedad básica de los logaritmos es que convierten productos en sumas:



$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad (x > 0, y > 0)$$

Dos funciones logaritmo cualesquiera, $\log_a$ y $\log_b$, están relacionadas por la igualdad:

$$\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \log_a x \qquad (x > 0)$$

Los *logaritmos decimales* corresponden a tomar $a = 10$; y los *logaritmos naturales*, también llamados *neperianos* (en honor de John Napier 1550-1617), corresponden a tomar como base el número e. El número e es un número irracional que puede aproximarse arbitrariamente por números de la forma $(1 + 1/n)^n$ para valores grandes de n. Un valor aproximado de e es $2,7182818284$. En esta asignatura trabajaremos siempre, salvo que explícitamente se indique lo contrario, con la función logaritmo natural, que notaremos log (la notación, cada día más en desuso, “ln”, para dicha función no será usada en este curso).

La función inversa de la función $\log_a$ es la función exponencial de base a, que se representa por $\exp_a$. Por tanto, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exp_a(x)$ es, por definición, el único número positivo cuyo logaritmo en base a es igual a x: $\log_a(\exp_a(x)) = x$. Es fácil comprobar que si $r \in \mathbb{Q}$ entonces $\exp_a(r) = a^r$, por lo que se usa la notación $\exp_a(x) = a^x$.

El dominio de la función $\exp_a$ es $\mathbb{R}$, y su imagen es $\mathbb{R}^+$. La función es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$. La propiedad básica de $\exp_a$ es que convierten sumas en productos:

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y) \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

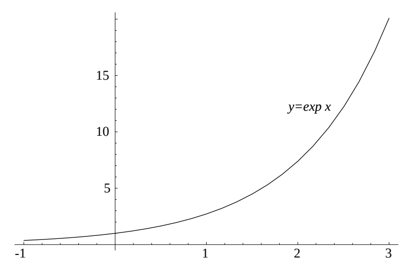
Dos funciones exponenciales cualesquiera, $\exp_a$ y $\exp_b$, están relacionadas por la igualdad:

$$\exp_b(x) = \exp_a(x\log_a b) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

La función exponencial de base e, inversa de la función logaritmo natural, se notará simplemente por exp. Por tanto $\exp(x) = e^x$. Con ello tenemos que:

$$\boxed{x^y = e^{y\log x} \qquad (x > 0, y\in\mathbb{R})}$$

La letra e se eligió en honor del gran matemático Leonhard Euler (1707-1783). A primera vista puede parecer que no hay razones particulares para llamar *natural* al número e. Las razones matemáticas de esta elección se verán al estudiar la derivación. Sin embargo, hay muchos procesos de crecimiento que hacen del número e una base exponencial extremadamente útil e interesante. Veamos unos ejemplos.



Interés compuesto. Supongamos que invertimos un capital inicial, P, a una tasa de interés anual r (expresado en tanto por uno), ¿cuánto dinero tendremos cuando hayan pasado k años? Respuesta: depende de cómo se paguen los intereses. En el *interés simple* se paga el total de los intereses al terminar la inversión, por lo que el interés total producido es igual a Prk, y el capital final será igual a $P(1+rk)$.

Sin embargo, lo usual es que se paguen intereses en períodos más cortos de tiempo. Estos intereses se acumulan al capital inicial y producen, a su vez, nuevos intereses. Esto se conoce como *interés compuesto*. Por ejemplo, si el interés se paga n veces al año (trimestralmente $(n = 4)$, mensualmente $(n = 12)$, etcétera) al final del primer período tendremos $P(1+r/n)$, al final del segundo $P(1+r/n)^2$; al final del primer año $P(1+r/n)^n$, al final del k-ésimo año tendremos $P(1+r/n)^{nk}$.

Cuando n es muy grande, el número $(1+r/n)^n$ es aproximadamente igual a e^r. Precisamente, si los interese se acumulan instantáneamente al capital, lo que se conoce como *interés compuesto continuo*, entonces el capital al final del k-ésimo año viene dado por $P\,e^{rk}$.

Crecimiento demográfico. Llamemos P_0 la población mundial actual, y sea λ la tasa anual de crecimiento expresada en tanto por uno, la cual suponemos que se mantiene constante. Notemos por $P(t)$ la población mundial pasados t años.

Pasado un año, la población será $P(1) \approxeq P_0 + \lambda P_0 = (1+\lambda)P_0$. Utilizamos el signo $\approxeq$ y no el $=$ porque hemos calculado el crecimiento de la población λP_0 como si esta fuese constantemente igual a P_0 en todo el año, lo que no es correcto.

Obtendríamos un resultado más exacto si consideramos el crecimiento de la población mensualmente. Como la tasa de crecimiento mensual es $\lambda/12$, pasado un mes la población será $(1+\frac{\lambda}{12})P_0$, y pasados doce meses $P(1) \approxeq \left(1+\dfrac{\lambda}{12}\right)^{12} P_0$. El cálculo sigue siendo aproximado, pues la población crece *continuamente*. Para obtener una mejor aproximación podríamos considerar días en vez de meses; en general si dividimos el año en n períodos, obtendríamos como aproximación:

$$P(1) \approxeq \left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n P_0$$

Cuanto mayor sea n menor será el error que cometemos. *Si hacemos que n crezca indefinidamente*, entonces el número $\left(1+\dfrac{\lambda}{n}\right)^n$ *se convierte en* e^{λ}, por lo que $P(1) = e^{\lambda}P_0$. Si el período de tiempo es de t años, entonces $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$.

Función potencia de exponente real a. Se llama así la función cuyo dominio es $\mathbb{R}^+$ que a cada $x > 0$ asigna el número x^a. Puesto que $x^a = \exp(a \log x)$, las propiedades de esta función se deducen con facilidad de las propiedades de las funciones exponencial y logaritmo natural.

Funciones trigonométricas. Vamos a hacer un estudio descriptivo de estas funciones. Nos limitaremos a recordar sus definiciones y propiedades básicas, dejando para más adelante un estudio riguroso de las mismas.

La palabra *tri-gono-metría* significa “medida de las figuras con tres esquinas”, es decir, de los triángulos. La trigonometría (plana) es el estudio de las relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo (plano) y las medidas de sus ángulos. Por ello, las funciones trigonométricas se definieron originalmente mediante triángulos rectángulos. No obstante, interesa definir dichas funciones usando la *circunferencia unidad*, es decir, la circunferencia centrada en 0 y de radio 1.

El concepto más específico de la trigonometría es el de *medida de un ángulo*. Para medir un ángulo llevamos su vértice al origen y medimos la longitud del arco de la circunferencia unidad que dicho ángulo intercepta, obtenemos así un número que llamamos la medida (absoluta, es decir no orientada) del ángulo en cuestión. Naturalmente, lo primero que hay que hacer para medir cualquier cosa es elegir una unidad de medida. Pues bien, para medir ángulos suelen usarse dos unidades de medida.

Medida de ángulos en grados. Consiste en tomar como unidad de medida la longitud total de la circunferencia unidad dividida por 360. Un ángulo de un grado es el que intercepta en la circunferencia unidad un arco cuya longitud es igual a $\dfrac{2\pi}{360}$.

Medida de ángulos en radianes. Consiste en tomar el propio radio de la circunferencia unidad como unidad de medida. Un ángulo de un radián es el que intercepta en la circunferencia unidad un arco cuya longitud es igual a 1 (es decir, igual a la del radio de dicha circunferencia, el cual se toma como unidad de medida).

La relación entre grados y radianes viene dada por:

$$180 \ \text{grados} = \pi \ \text{radianes}$$

No hay que olvidar que *grados* y *radianes* no son otra cosa que *unidades de medida* de longitudes, al igual que lo son el metro y el centímetro. En la navegación y en la astronomía los ángulos se miden en grados, pero en Cálculo es preferible medirlos en radianes porque se simplifican las cuentas. Por ejemplo, la longitud de un arco de circunferencia se obtiene multiplicando la longitud del radio de dicha circunferencia por la medida *en radianes* del ángulo que corresponde a dicho arco.

Nótese que la ventaja de medir en radianes es que, en tal caso, un mismo número, el 1, representa la medida del radio unidad y del radián; mientras que si medimos en grados, el número que expresa la medida del radio sería $360/2\pi \simeq 57,2957$.

Convenio de los ángulos: usar radianes. De ahora en adelante, a menos que se establezca explícitamente otra unidad, supondremos que todos los ángulos están medidos en radianes.

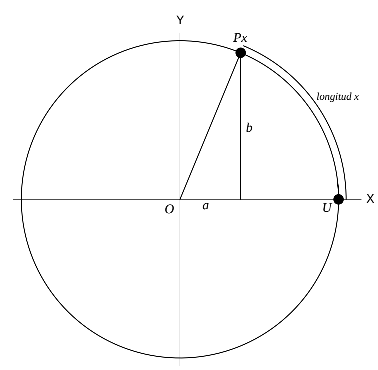
Funciones seno y coseno. Hay dos funciones que suelen confundirse: el seno de un ángulo y el seno de un número. En geometría se habla del *seno de un ángulo* y en Cálculo usamos la expresión $\operatorname{sen}(\sqrt{2})$ para referirnos al *seno del número* $\sqrt{2}$. ¿Qué relación hay entre uno y otro? Antes que nada hay que decir que tanto el seno de un ángulo como el seno de un número *son números*, pero mientras que el seno de un ángulo tiene una sencilla definición geométrica, no es evidente, a priori, cómo se puede definir el seno de un número.

La idea consiste en asociar a cada número un (único) ángulo y definir el seno del número como el seno del ángulo que le corresponde. Es evidente que a cada número $x \geqslant 0$ le podemos asignar de manera única un ángulo "enrollando" el segmento $[0,x]$ sobre la circunferencia unidad, *en sentido contrario a las agujas del reloj*, de forma que el origen de dicho segmento coincida con el punto $U=(1,0)$ de la circunferencia. Obtenemos así un punto P_x de la circunferencia unidad. Pues bien, si las coordenadas de P_x son (a,b), se define:

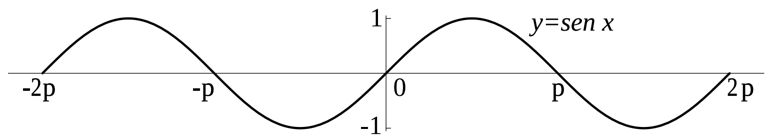
$$\operatorname{sen} x = \text{seno del ángulo}(\widehat{OUP_x}) = b \quad \text{y} \quad \cos x = \text{coseno del ángulo}(\widehat{OUP_x}) = a.$$

Al ser igual a 2π la longitud de la circunferencia unidad, es claro que $P_{x+2\pi}=P_x$, por lo que $\operatorname{sen}(x)=\operatorname{sen}(x+2\pi)$ y $\cos(x)=\cos(x+2\pi)$. Nótese también que si $0 \leqslant x < 2\pi$, entonces la *medida en radianes* del ángulo $\widehat{OUP_x}$ es igual a x, es decir:

$$\operatorname{sen}(x) = \text{ seno del ángulo de } x \text{ radianes } (0 \leqslant x < 2\pi)$$



Si $x<0$ podemos proceder con el segmento $[x,0]$ de forma análoga a la anterior, con la diferencia de que ahora enrollamos dicho segmento sobre la circunferencia unidad *en el sentido de las agujas del reloj*, de forma que su extremo 0 coincida con el punto $U=(1,0)$ de la circunferencia. Obtenemos así un punto $P_x=(c,d)$ de la circunferencia unidad y se define, igual que antes $\operatorname{sen}(x)=d$, $\cos(x)=c$. Es fácil ver que si $P_x=(c,d)$, entonces $P_{-x}=(c,-d)$. Resulta así que $\operatorname{sen}(x)=-\operatorname{sen}(-x)$ y $\cos(x)=\cos(-x)$.



Observación. Podemos definir la función *seno en grados* sin más que interpretar que x es la medida en grados del ángulo que le corresponde. El hecho de que se use la misma notación para ambas funciones es la causa de muchos errores. Si notamos $\operatorname{sen}^{o}(x)$ el valor del seno del ángulo cuya media es x grados, y notamos $\operatorname{sen}^{r}(x)$ el valor del seno del ángulo cuya media es x radianes (es decir, la función que hemos definido antes); la relación entre ambas funciones viene dada por:

$$\operatorname{sen}^{o}(x) = \operatorname{sen}^{r}\frac{2\pi x}{360} = \operatorname{sen}^{r}\frac{\pi x}{180}$$

Es frecuente que $\operatorname{sen}^{o}(x)$ se escriba como $\operatorname{sen} x^{o}$. Por ejemplo $\operatorname{sen}(45^{o})$. A esta mala notación se deben las dudas que a veces surgen sobre el significado de $\operatorname{sen} x$ y que llevan a preguntar: "¿está x en grados o en radianes?", cuando lo que realmente debería preguntarse es "¿se trata de $\operatorname{sen}^{o}(x)$ o de $\operatorname{sen}^{r}(x)$?"; porque, en ambos casos, x es tan sólo un número al que no hay por qué ponerle ninguna etiqueta.
Insistimos, una última vez: en este curso de Cálculo el número $\operatorname{sen} x$ significará siempre $\operatorname{sen}^{r} x$. Por tanto $\operatorname{sen}(\pi/4) \neq \operatorname{sen}(45)$ (pero $\operatorname{sen}(\pi/4) = \operatorname{sen}^{o}(45)$).

Propiedades de las funciones seno y coseno.
Las funciones seno y coseno son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. Las identidades básicas que dichas funciones verifican son:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Como se ha dicho antes, las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π:

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

La función seno es impar y la función coseno es par:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Todas las propiedades anteriores se deducen fácilmente de las definiciones dadas. Las siguientes igualdades, conocidas como *fórmulas de adición*, se probarán más adelante:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y + \cos x \operatorname{sen}y \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen}x \operatorname{sen}y \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

La función seno se anula en los múltiplos enteros de π, es decir, en los puntos de la forma $k\pi$ donde k es un entero cualquiera. La función coseno se anula en los puntos de la forma $k\pi+\pi/2$ donde k es un entero cualquiera.

Las funciones **tangente** y **secante**, que se representan por tg y sec son las funciones definidas en el conjunto $\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\pi/2 : k\in\mathbb{Z}\} = \{x\in\mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$, por:

$$\operatorname{tg}x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Las funciones **cotangente** y **cosecante**, que se representan por cotg y csc son las funciones definidas en el conjunto $\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\} = \{x\in\mathbb{R} : \operatorname{sen}x \neq 0\}$, por:

$$\operatorname{cotg}x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen}x}$$

Las propiedades de estas funciones se deducen con facilidad de las propiedades del seno y del coseno. Por ejemplo, $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x+\pi)$; es decir, la función tangente es periódica de período π.

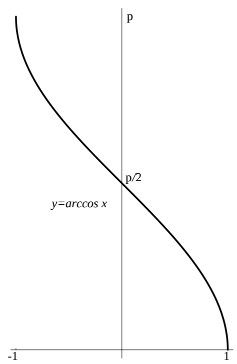
Las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente.

Lo primero que hay que decir es que ninguna de las funciones "seno", "coseno", "tangente", es inyectiva pues todas ellas son periódicas y, por tanto, toman cada uno de sus valores en infinitos puntos; en consecuencia, ninguna de ellas tiene inversa. Por tanto, no debe decirse que las funciones *arcoseno*, *arcocoseno*, *arcotangente* sean las funciones inversas del seno, del coseno o de la tangente: eso no es cierto. Hecha esta observación imprescindible, pasemos a definir dichas funciones.

La función seno es estrictamente creciente en el intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1, $\operatorname{sen}([-\pi/2,\pi/2]) = [-1,1]$. En consecuencia, dado un número $x\in[-1,1]$ hay un único número $y\in[-\pi/2,\pi/2]$ tal que $\operatorname{sen}y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc}\operatorname{sen}x$ y se llama el *arcoseno de x*. Es decir, el arcoseno es la función:

$$\operatorname{arc\,sen}\colon[-1,1]\to\mathbb{R} \ \text{ definida por: } \ \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)=x\,, \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{arc\,sen} x\leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Nótese que la igualdad $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)=x$, es cierta si, y sólo si, $-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2$.



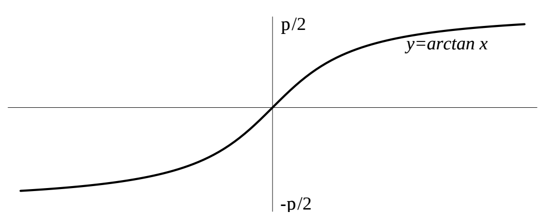
La función coseno es estrictamente decreciente en el intervalo $[0,\pi]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1. Por tanto, dado un número $x\in[-1,1]$, hay un único número $y\in[0,\pi]$ tal que $\cos y=x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,cos} x$ y se llama *arcocoseno de x*. Es decir, arcocoseno es la función $\operatorname{arc\,cos}\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $\cos(\operatorname{arc\,cos} x)=x$ y $0\leqslant \operatorname{arc\,cos} x\leqslant\pi$.

Nótese que la igualdad $\operatorname{arc\,cos}(\cos x)=x$, es cierta si, y sólo si, $0\leqslant x\leqslant\pi$.

La función tangente es estrictamente creciente en el intervalo $]-\pi/2,\pi/2[$ y en dicho intervalo toma todos los valores reales, $\operatorname{tg}(]-\pi/2,\pi/2[)=\mathbb{R}$. En consecuencia, dado un número $x\in\mathbb{R}$, hay un único número $y\in]-\pi/2,\pi/2[$ tal que $\operatorname{tg} y=x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,tg} x$ y se llama el *arcotangente de x*. Es decir, el arcotangente es la función:

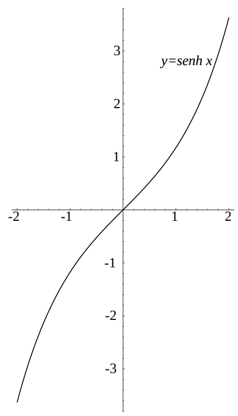
$$\operatorname{arc\,tg}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ \text{ definida por: } \ \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x\,, \quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} x<\frac{\pi}{2}.$$

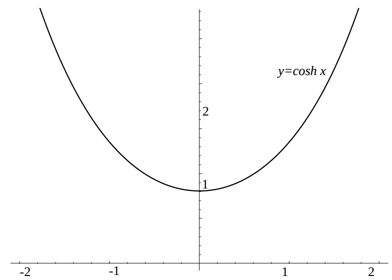
Nótese que la igualdad $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)=x$, es cierta si, y sólo si, $-\pi/2<x<\pi/2$.



Las funciones hiperbólicas. Hay algunas combinaciones de las funciones $\exp(x)$ y $\exp(-x)$ que aparecen con tanta frecuencia que se les da nombre propio. Ellas son las funciones *seno* *hiperbólico*, representada por senh, y *coseno hiperbólico*, representada por cosh, y están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$





Propiedades de las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico.
Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. La identidad básica que dichas funciones verifican es:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

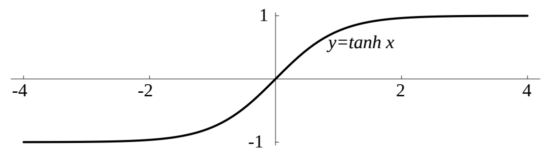
La función seno hiperbólico es impar y la función coseno hiperbólico es par:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x, \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad (x \in \mathbb{R})$$

La función seno hiperbólico es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. La función coseno hiperbólico es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$.
Todas las propiedades anteriores se deducen fácilmente de las definiciones dadas.

La función tangente hiperbólica que se representa por tgh es la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

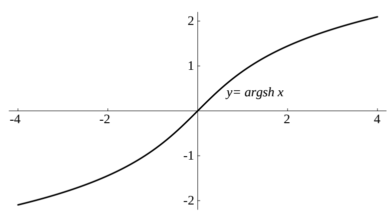
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

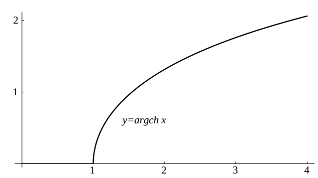


De forma análoga se definen las funciones cotangente, secante y cosecante hiperbólicas.

Las funciones hiperbólicas inversas. La función seno hiperbólico es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa, representada por, argsenh, (léase *argumento seno hiperbólico*) viene dada por:

$$\operatorname{argsenh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (x \in \mathbb{R})$$



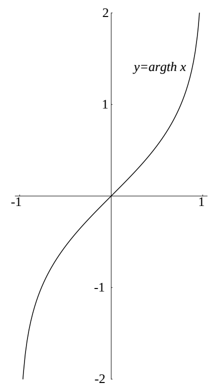


La función tangente hiperbólica es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre el intervalo $]-1,1[$ cuya inversa, representada por, argtgh, (léase *argumento tangente hiperbólica*) es la función definida en el intervalo $]-1,1[$ por:

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)$$

La función coseno hiperbólico es inyectiva en $\mathbb{R}_o^+$ y su imagen es la semirrecta $[1,+\infty[$. La función, definida en $[1,+\infty[$, que a cada número $x \geqslant 1$ asigna el único número $y > 0$ tal que $\cosh y = x$, se llama *argumento coseno hiperbólico*, se representa por, argcosh, y viene dada por:

$$\operatorname{argcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x \geqslant 1)$$



La razón de por qué estas funciones se llaman hiperbólicas es que, al igual que los puntos (x,y) de la circunferencia unidad pueden representarse en la forma $(x,y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, los puntos (x,y) en la rama derecha de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ pueden representarse como $(x,y) = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$.

Naturalmente, la importancia de las funciones trigonométricas procede de que multitud de fenómenos naturales son de naturaleza ondulatoria. Todos sabéis lo que es un electrocardiograma; pues bien, la gráfica que aparece en ese informe clínico no es más que superposiciones de gráficas de senos y cosenos.

Las funciones hiperbólicas, por su parte, también sirven para describir el movimiento de ondas en sólidos elásticos, o la forma que adoptan los cables eléctricos colgantes. Hay una hermosa curva llamada *catenaria* cuya ecuación es de la forma $y = a\cosh(x/a)$ (donde se entiende que a es una constante). La catenaria es la forma que adopta una cadena perfectamente flexible suspendida de sus extremos y bajo la acción de la gravedad.

Continuidad

Para motivar la definición que vamos a dar de continuidad, consideremos una ley física de la forma $P = f(V)$, que relaciona los valores de una "variable independiente V" (podemos pensar que es el volumen de un gas) con otra "variable dependiente P" (podemos pensar que es la presión). Si queremos usar dicha ley, hemos de medir un valor V_o de la variable V, y es inevitable que al hacerlo cometamos algún error el cual, naturalmente, influye en el correspondiente valor de P, que ya no será exactamente igual a $P_o = f(V_o)$. Surge así la pregunta natural: ¿de qué forma el error en la medida de V afecta al valor resultante de P?

Es claro que si para valores de V "muy próximos" a V_o obtengo valores de P muy diferentes entre sí, la ley "f" que relaciona V con P no tendrá ninguna utilidad práctica.

Puesto que los errores de medida son inevitables, no es razonable tratar de obtener "el verdadero valor P_o". Lo que sí puede hacerse es fijar una cota de error admisible para P (la cual dependerá de cada situación concreta); llamemos "ε" a dicha cota, ($\varepsilon > 0$), y tratar de obtener otra cota de error "δ", ($\delta > 0$), de tal forma que siempre que midamos V_o con un error menor que δ tengamos la seguridad de que el valor resultante para P se diferencia de P_o en menos que ε. Esto es, $|f(V) - f(V_o)| < \varepsilon$ siempre que $|V - V_o| < \delta$. Cuando esto efectivamente pueda hacerse para cualquier cota de error $\varepsilon > 0$ decimos que la ley "f" es continua en V_o. Nótese que cabe esperar que la cota de error δ dependa del $\varepsilon > 0$ fijado en cada caso, y también de V_o.

Las ideas anteriores conducen, de forma natural, a la definición matemática de continuidad. En todo lo que sigue, la letra A representará un conjunto no vacío de números reales. En la práctica A será siempre un intervalo o una unión de intervalos. Recuérdese que la notación $f : A \to \mathbb{R}$ quiere decir que f es una función real cuyo dominio es A. Es muy importante advertir que A no tiene por qué coincidir con el dominio natural de la función. Esto es así porque con frecuencia estamos interesados en estudiar propiedades de una función en una parte de su dominio natural. Además, la continuidad de f depende tanto de la "regla que la define" como del conjunto en donde estamos trabajando. Enseguida pondremos ejemplos para aclarar esto.

Definición de continuidad en un punto. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La definición anterior suele escribirse, con abuso del formalismo lógico, de la siguiente forma:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Adviértase cómo en esta definición el conjunto A tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de f en A, lo que le pueda pasara a f fuera de A no nos interesa.

Se dice que f es continua en un subconjunto $C \subseteq A$, si f es continua en todo punto de C.

Función “parte entera”. Se llama así la función que a cada número x asigna *el mayor entero que es menor o igual que* x. Dicha función se representa con la letra E y está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por las condiciones siguientes:

$$E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

No es difícil probar que esta función es discontinua en todos los enteros. Ahora, si consideramos a dicha función trabajando solamente en el intervalo $[1,2[$, es decir, la función f cuyo dominio es el intervalo $[1,2[$ y que a cada punto de dicho intervalo asigna su “parte entera”, $f(x) = E(x)$, para $1 \leqslant x < 2$; entonces la función f es constante pues, claramente $f(x) = 1$ para todo $x \in [1,2[$, luego f es continua en todos los puntos de su dominio, en particular f es continua en 1 a pesar de que la función “parte entera” es discontinua en dicho punto.

El ejemplo anterior pone de manifiesto la importancia que tiene el dominio en el que estamos considerando que trabaja la función; pues una “misma regla” puede definir una función continua o no, dependiendo del dominio donde dicha regla se aplique.

Nótese que, según la definición dada, *no tiene sentido hablar de la continuidad de una función en puntos en los que dicha función no está definida*. Así, la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$, no es continua ni discontinua en 0, simplemente, no está definida en 0. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$ y $f(0) = 1$ es continua en $\mathbb{R}^*$ y discontinua en 0.

La expresión “f es continua” cuando no se especifica en dónde estamos considerando definida a f, significa que f es continua en su dominio natural de definición.

No suele ser tarea fácil demostrar que una función dada es continua. Generalmente, lo que se hace es descomponer la función que queremos estudiar en otras más sencillas cuya continuidad ya es conocida previamente. Es por ello interesante saber qué tipo de operaciones realizadas con funciones continuas conducen a nuevas funciones continuas.

Propiedades básicas de las funciones continuas.

Sean f, g funciones reales definidas en A. Se verifica que:

i) Las funciones $f + g$ y fg son continuas en todo punto de A en el que las dos funciones f y g sean continuas. En particular, las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.

ii) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, la función $\dfrac{1}{g}$ es continua en todo punto de A en el que g sea continua. En consecuencia, la función cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula nunca es una función continua.

Las propiedades anteriores no son difíciles de demostrar y, sin embargo, son de gran utilidad.

Corolario. Las funciones racionales son funciones continuas.

De hecho, todas las funciones elementales estudiadas en el Capítulo 1 son continuas aunque una prueba rigurosa de esto no podemos hacerla todavía.

Además de sumar y multiplicar funciones, también sabemos componerlas. Veamos cómo se comporta la continuidad respecto de la composición de funciones.

Continuidad de una función compuesta. Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subseteq B$. Supongamos que f es continua en un punto $a \in A$ y que g es continua en el punto $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto a. En particular, si g es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en todo punto de A en el que f sea continua. Más en particular, la composición de funciones continuas es una función continua.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de g en $f(a)$, existe $\rho > 0$ tal que para todo $y \in B$ con $|y - f(a)| < \rho$ se tiene que $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$. Ahora, por la continuidad de f en a, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(a)| < \rho$. Deducimos así que $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$. Es decir, la función compuesta $g \circ f$ es continua en a.

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la "proximidad" de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*.

Restricción y extensión de una función.

Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$ y un subconjunto no vacío $C \subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de f a C* que se representa por $f_{|C}$, que es la función *definida en el conjunto C* que viene dada por $f_{|C}(x) = f(x)$ para todo $x \in C$.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que una función $g : B \to \mathbb{R}$ es una *extensión* de f, si $B \supset A$ y f es la restricción de g al conjunto A, es decir $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Nótese que los conceptos de extensión y de restricción de una función son esencialmente el mismo: todo depende de que se mire “para arriba” o “para abajo”.

Es importante distinguir entre una función y su restricción a un conjunto. Hemos visto, en el ejemplo de la función “parte entera”, que una restricción de una función discontinua puede ser continua o, lo que es igual, una extensión de una función continua puede ser discontinua. Son importantes y útiles a este respecto los siguientes resultados.

a) Cualquier restricción de una función continua es también continua.
b) Cualquier extensión de una función continua en un *intervalo abierto* es también *continua en dicho intervalo abierto*.

Nótese la importancia que en la afirmación b) anterior tiene el hecho de que el intervalo sea *abierto*. El ejemplo de la función “parte entera”, antes visto, pone de manifiesto que una extensión de una función continua en un intervalo *no abierto* puede no ser continua.

De las afirmaciones anteriores se deduce la siguiente:

Teorema de localización. Una función f es continua en un intervalo abierto I si, y sólo si, la restricción $f_{|I}$ es continua en I.

El resultado anterior es bastante útil para evitarnos hacer trabajo innecesario. Por ejemplo, si queremos estudiar la continuidad de la función “parte entera”, como dicha función es constante en los intervalos de la forma $]n, n+1[$ $(n \in \mathbb{Z})$, el resultado anterior nos dice que dicha función es continua en estos intervalos. Sólo queda así estudiar qué pasa en los enteros.

Los dos resultados que siguen ponen de manifiesto cómo la continuidad de una función en un punto permite obtener información sobre el comportamiento de la función en los puntos próximos al mismo. Estos resultados se llaman *locales*.

Acotación local. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in A$. Entonces hay números, $M > 0$, $r > 0$ tales que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $|f(x)| \leqslant M$. (Es decir, f está acotada en un entorno del punto a)

Conservación local del signo. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in A$ con $f(a) \neq 0$.

Entonces hay un número $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $f(x)f(a) > 0$. (Es decir, f es positiva (si $f(a) > 0$) o negativa (si $f(a) < 0$) en todos los puntos de un entorno de a)

Demostración. Supondremos que $f(a) > 0$. Podemos entonces tomar $\varepsilon = f(a)/2$ para obtener, en virtud de la continuidad de f en a, un $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < f(a)/2$, lo que implica que $f(x) > f(a)/2 > 0$. El caso en que $f(a) < 0$ se reduce al anterior sin más que sustituir f por $-f$.

Teorema de Bolzano. Supremo e ínfimo

Si ahora mides 175cms. y hace 10 años medías 135cms., es seguro que en algún momento intermedio medías con exactitud 161cms. Si una entrada de cine cuesta 600Ptas. y hace 5 años costaba 450Ptas., es seguro que en algún momento ir al cine costaba exactamente 499Ptas. ¿Seguro? No, a ningún empresario de cine le parecería bien cobrar 499Ptas. por la entrada.

La diferencia está en que la talla de una persona es una función continua del tiempo y para pasar de 135cms. a 175cms. tiene que pasar por todos los valores intermedios, pero el precio de las entradas de cine no varía de forma continua con el tiempo y puede pasar "de golpe" de 450Ptas. a 500Ptas.

La gráfica de una función continua en un intervalo, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, la imaginamos como una curva continua, por ello, si $f(a) < 0 < f(b)$, la gráfica de f tiene que atravesar el eje x para pasar de un punto situado por debajo de él a otro que se encuentra por encima y, por tanto, f *tiene que* anularse en algún punto entre a y b. Esto es precisamente lo que afirma el conocido *teorema* que sigue.

Teorema de los ceros de Bolzano. Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.

Lo primero que llama la atención en este teorema es su *evidencia*. No está de más a este respecto recordar, que, como decía Bertrand Russell, "en matemáticas la evidencia es enemiga de la corrección". Precisamente, el mérito de Bernard Bolzano (1781-1848) está en haber llamado la atención sobre la necesidad de *demostrar* muchas proposiciones, aparentemente evidentes, que se refieren a las funciones continuas. Podemos añadir, además, que suele ser particularmente difícil demostrar matemáticamente lo que nuestra intuición presenta como evidente; de hecho, *con las herramientas que tenemos hasta ahora no podemos demostrar el teorema.*

La función $f(x)=x^2-2$ es continua y $f(0)<0<f(2)$, el teorema de Bolzano asegura que existe un número positivo en el que f se anula. En otras palabras, el teorema prueba *la existencia* del número $\sqrt{2}$ y, como dicho número no es racional, deducimos que para probar el teorema se precisa usar alguna propiedad que NO tienen los números racionales. Pero todas las propiedades de los números reales que enunciamos en la primera lección las tienen también los números racionales. Concluimos que los números reales deberán tener otra propiedad que todavía no hemos considerado.

Comentamos el primer día que no debemos preocuparnos mucho *por lo que sea* el número $\sqrt{2}$, pero al menos deberíamos de tener alguna forma de *probar su existencia*; es decir, de las propiedades de los números reales se debería poder deducir que hay un número cuyo cuadrado es igual a 2. ¿Qué sabemos de $\sqrt{2}$? No es racional, pero podemos aproximarlo por racionales. Con una calculadora obtenemos sucesivas aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$ por defecto:

$$1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41421,\ 1{,}414213,\ \ldots$$

Es claro que $\sqrt{2}$ debe ser el *menor número mayor que todas ellas*. Pues bien, justamente necesitamos una propiedad que garantice la existencia de ese "menor número mayor que". Nos vendrá bien introducir alguna terminología nueva.

Sea E un conjunto no vacío de números reales. Un número $z\in\mathbb{R}$ se dice que es un **mayorante o cota superior** (resp. **minorante o cota inferior**) de E si $x\leqslant z$ (resp. $z\leqslant x$) para todo $x\in E$. Si hay algún elemento de E que también sea mayorante (resp. minorante) de E, dicho elemento es necesariamente único y se llama **máximo** (resp. **mínimo**) de E y lo representaremos por $\text{máx}(E)$ (resp. $\text{mín}(E)$). Un conjunto que tiene algún mayorante (resp. minorante) se dice que está **mayorado o acotado superiormente** (resp. **minorado o acotado inferiormente**). Un conjunto que está mayorado y minorado se dice que está **acotado**.

Está claro que un conjunto puede no tener mínimo ni máximo. Los problemas de "optimización" consisten, justamente, en estudiar condiciones que garanticen la existencia de valores máximos y mínimos para funciones de diversas clases. La siguiente propiedad garantiza que *ciertos conjuntos* de números reales tienen mínimo.

P8 [Propiedad del supremo] Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, no vacío y mayorado, se llama **supremo o extremo superior** de E, al mínimo mayorante de E y lo notaremos por $\sup(E)$. Con esta terminología lo que dice la propiedad del supremo es que todo conjunto de números reales no vacío y mayorado tiene supremo (pero nótese que el supremo no tiene por qué pertenecer al conjunto).

La propiedad del supremo es lo que distingue a los números reales de los racionales. Dicha propiedad se usa para probar la existencia de números reales que cumplen alguna determinada condición. La demostración del teorema de Bolzano es un ejemplo importante de ello.

Demostración del teorema de los ceros de Bolzano.
Es suficiente probar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces f se anula en algún punto del intervalo $]a,b[$. Una buena estrategia para demostrar un teorema es "darlo por demostrado" y *trabajar hacia atrás*. Tenemos que buscar un punto $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$. Por supuesto, puede haber muchos puntos donde f se anule (el teorema dice que *al menos hay uno*), pero de todos ellos el más fácil de caracterizar es el "primero", porque a la izquierda de él la función es siempre negativa. Esto lleva a considerar el conjunto E de los puntos $x \in [a,b]$ tales que f toma valores negativos en $[a,x]$:

$$E = \{x \in [a,b] : f(t) < 0 \ \text{ para todo } \ t \in [a,x]\}$$

Por su definición, tenemos que $E \subset [a,b]$ y $a \in E$. La propiedad del supremo nos dice que hay un número real, c, que es el supremo de E. Es evidente que $a \leqslant c \leqslant b$. La propiedad de conservación local del signo implica que existe algún $\delta > 0$ tal que $a + \delta < b - \delta$ y f es negativa en todos los puntos del intervalo $[a, a + \delta]$ y positiva en todos los puntos del intervalo $[b - \delta, b]$. Esto implica que $a < c < b$.
Veamos que $[a,c[\subset E$. Sea $a < x_o < c$. Como $x_o < c$ y c es el mínimo mayorante de E, tiene que existir algún punto $z_o \in E$ tal que $x_o < z_o \leqslant c$. Por tanto, si $t \in [a,x_o]$ también $t \in [a,z_o]$ y, como, $z_o \in E$, será $f(t) < 0$, luego $x_o \in E$. Nótese que hemos probado también que $f(x) < 0$

para todo $x \in [a, c[$.

Finalmente, probaremos que $f(c) = 0$. Como a la izquierda de c la función f toma valores negativos y f es continua, deducimos que *no puede ser* $f(c) > 0$ y, por tanto, $f(c) \leqslant 0$. Pero tampoco puede ser $f(c) < 0$, pues entonces, por la conservación local del signo, habría un intervalo de la forma $[c - \rho, c + \rho] \subset [a, b]$ tal que $f(t) < 0$ para todo $t \in [c - \rho, c + \rho]$ lo que implica que en E hay puntos mayores que c lo que es contradictorio. Concluimos así que $f(c) = 0$.

Hay consecuencias de este teorema que están lejos de ser evidentes. Por ejemplo, puede probarse, con la ayuda del teorema de Bolzano, que si tenemos tres sólidos en el espacio (imagina que son tres bocadillos de muy distintos tamaños), es siempre posible encontrar un plano que los divida simultáneamente en partes iguales (puedes cortar a los tres bocatas exactamente por la mitad de un sólo tajo).

Un enunciado *equivalente* del teorema de Bolzano es el siguiente.

Teorema del valor intermedio La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.

Hemos *demostrado* así la *evidencia* inicial: una función continua en un intervalo toma todos los valores comprendidos entre dos cualesquiera de sus valores.

Veamos algunas consecuencias sencillas del teorema de Bolzano.

Corolario [Existencia de raíces] Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$.

Corolario [Ceros de polinomios de grado impar] Toda función polinómica de grado impar se anula en algún punto.

A partir de la propiedad del supremo, se prueba con facilidad la **propiedad del ínfimo**: Para todo conjunto de números reales no vacío y minorado se verifica que el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, no vacío y minorado, se llama **ínfimo o extremo inferior** de E, al máximo minorante de E y lo notaremos por $\inf(E)$. Con esta terminología lo que dice la propiedad del ínfimo es que todo conjunto de números reales no vacío y minorado tiene ínfimo (pero nótese que el ínfimo no tiene por qué pertenecer al conjunto).

Teorema del valor máximo y mínimo (Weierstrass)

Sabemos ya que la imagen, $f(I)$, de un intervalo I por una función continua f es un intervalo. Nos preguntamos ¿Es $f(I)$ un intervalo del *mismo tipo* que I? Enseguida nos damos cuenta de que no tiene por qué ser así.

1. $f(x)=x^2$; $f([-1,1[)=f(]-1,1])=[0,1]$;
2. $f(x)=1/x$; $f(]0,1])=[1,+\infty[$; $f([1,+\infty[)=]0,1]$.
3. $f(x)=\operatorname{sen}x$; $f(]-\pi,\pi[=[-1,1]$.

Vemos así que la imagen por una función continua de un intervalo abierto, o semiabierto, o de una semirrecta, puede ser un intervalo de distinto tipo. Nos queda por considerar qué ocurre con los intervalos cerrados (y acotados), es decir, los de la forma $[a,b]$. Nótese que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, para probar que $f([a,b])$ es un intervalo cerrado y acotado basta probar que el conjunto $f([a,b])$ tiene máximo y mínimo, es decir, que hay números $u,v\in[a,b]$ tales que para todo $x\in[a,b]$ es $f(u)\leqslant f(x)\leqslant f(v)$, pues entonces será $f([a,b])=[f(u),f(v)]$.

Suele usarse la siguiente terminología. Sea $f:B\to\mathbb{R}$. Se dice que f *está acotada en* E si el conjunto $f(B)$ está acotado. Se dice que f alcanza en B un **máximo** (resp. un **mínimo**) **absoluto** si el conjunto $f(B)$ tiene máximo (resp. mínimo), es decir, existe algún punto $c\in B$ (resp. $b\in B$) tal que $f(x)\leqslant f(c)$ (resp. $f(b)\leqslant f(x)$) para todo $x\in B$.

Teorema del valor máximo y mínimo (Weierstrass) Toda función continua, f, en un intervalo cerrado y acotado, $[a,b]$, alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos. En particular f está acotada en $[a,b]$.

Demostración. Queremos probar que hay algún punto $c\in[a,b]$ en el que f alcanza un máximo absoluto. ¿Cómo podemos encontrar a c? Siguiendo un razonamiento parecido al del teorema de los ceros de Bolzano, nos damos cuenta de que a la izquierda de c la función tiene que tomar valores menores o iguales que $f(c)$, por tanto, para que un punto $x\in[a,b]$

puede ser el que nosotros buscamos, deberá ocurrir que para todo $t \in [a,x]$ se tenga que $f(t) \leqslant f(x)$. Esto lleva a considerar el siguiente conjunto:

$$E = \{x \in [a,b] : f(t) \leqslant f(x) \quad \text{para todo } t \in [a,x]\}$$

La idea siguiente es considerar el máximo de E. Pero no sabemos *a priori* que E tenga máximo, por eso lo que hacemos es considerar el supremo de E, cuya existencia sí está garantizada. Sea, pues, $c = \sup(E)$. La intuición nos dice que el punto c así definido cumple lo que queremos, pero hay que probarlo. Nótese que $c \in [a,b]$ (¡Aquí es donde se utiliza la hipótesis de que el intervalo es cerrado y acotado!)

A) Empezaremos probando que $c \in E$. Si $c = a$ nada hay que probar porque $a \in E$. Supondremos que $a < c \leqslant b$. Sea $u \in [a,b]$ tal que $u < c$. Probemos *que no puede ser* $f(c) < f(u)$. Si así fuera, llamando $g(x) = f(u) - f(x)$; por la continuidad de f y el teorema de conservación del signo, tiene que hazer un número $\delta > 0$ tal que $u < c - \delta$ y para todo $z \in]c-\delta, c]$ se cumpla que $g(z) > 2$, es decir $f(z) < f(u)$. Por ser c el mínimo mayorante de E, tiene que haber algún $z_o \in]c-\delta, c] \cap E$. Tenemos entonces que $f(z_o) < f(u)$ y, como $z_o \in E$ y $a \leqslant u < z_o$ deberá ser $f(u) \leqslant f(z_o)$, lo que nos lleva a que $f(z_o) < f(u) \leqslant f(z_o)$ y por tanto $f(z_o) < f(z_o)$ lo cual es claramente contradictorio. Concluimos que $f(u) \leqslant f(c)$.

B) Probaremos ahora que $f(x) \leqslant f(c)$ para todo $x \in [a,b]$. En virtud del apartado anterior, si $c = b$ hemos acabado. Consideremos, pues $a \leqslant c < b$. Falta probar que si $c < v \leqslant b$ entonces $f(v) \leqslant f(c)$. La idea ahora es asociar a v un punto $\lambda_v \in E$, tal que $f(v) \leqslant f(\lambda_v)$. Notemos que si $c < v \leqslant b$, entonces $v \notin E$ por la que tiene que haber algún $z \in [a,v[$ tal que $f(v) < f(z)$. La idea ahora es "cazar" al menor de tales z. Consideramos para ello el conjunto

$$A_v = \{z \in [a,b] : f(v) \leqslant f(z)\}$$

y definimos $\lambda_v = \inf(A_v)$. Por la observación antes hecha tenemos que $a \leqslant \lambda_v < v$. Queremos probar que λ_v es el mínimo de A_v, es decir que $f(v) \leqslant f(\lambda_v)$. Para ello razonamos como antes para probar que la desigualdad $f(\lambda_v) < f(v)$ lleva a contradicción. En efecto, si fuera $f(\lambda_v) < f(v)$, llamando $h(x) = f(v) - f(x)$; por la continuidad de f y el teorema de conservación del signo, tiene que haber un número $\delta > 0$ tal que $\lambda_v + \delta \leqslant b$ y para todo $z \in [\lambda_v, \lambda_v + \delta[$ se cumpla que $h(z) > 0$, es decir $f(z) < f(v)$. Por ser λ_v el máximo minorante dx A_v, tiene que haber algún $z_o \in [\lambda_v, \lambda_v + \delta[\cap A_v$. Tenemos entonces que $f(z_o) < f(v)$

y, como $z_o \in A_v$ deberá ser $f(v) \leqslant f(z_o)$, lo que nos lleva a que $f(z_o) < f(v) \leqslant f(z_o)$ y por tanto $f(z_o) < f(z_o)$ lo cual es claramente contradictorio. Concluimos que $f(v) \leqslant f(\lambda_v)$.
Deducimos ahora que $\lambda_v \in E$, y, como $c \in E$, concluimos que $f(v) \leqslant f(\lambda_v) \leqslant f(c)$.
De A) y B) se sigue que $f(x) \leqslant f(c)$ para todo $x \in [a,b]$.
La consideración de la función $-f$ prueba que también f alcanza un mínimo absoluto en $[a,b]$. Queda así demostrado el teorema.
Como aplicación del teorema de Weierstrass puede probarse el siguiente resultado.

Proposición. Una función polinómica de grado par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$ si el coeficiente líder es positivo, $a_n > 0$, y alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$ si el coeficiente líder es negativo, $a_n < 0$.

Límite funcional

Sex I un intervalo, a un punto de I, y f una función definida en $I \setminus \{a\}$. Naturalmente, como f no está definida en a no tiene sentido hablar de la continuidad de f en a. Sin embargo, podemos preguntarnos ¿es posible encontrar un número $L \in \mathbb{R}$ tal que *definiendo* $f(a) = L$, la *nueva función* así obtenida sea continua en a? Para ello el número L tendría que cumplir la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \quad \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

donde la condición "$0 < |x-a|$" es obligada porque la función f no está definida en a.

Podemos modificar un poco la situación anterior, suponiendo ahora que f está definida en todo el intervalo I pero no es continua en a. En este caso queremos cambiar el valor de f en a, es decir, encontrar, si es posible, un número $L \in \mathbb{R}$ tal que *definiendo* el valor de f en a igual a L, la *nueva función* así obtenida sea continua en a. La condición que tiene que cumplir dicho número L es exactamente la misma de antes.
Nótese que ahora la condición "$0 < |x-a|$" es obligada porque nuestra función f no está definida en a de "forma apropiada".

En los dos casos considerados la condición obtenida es la misma con independencia del hecho de que f esté o no definida en a y, en caso de estarlo, del posible valor que f pueda tener en a. Por ello, en lo que sigue consideraremos la siguiente situación.

NOTACIÓN. En adelante, representaremos por I un intervalo; a será un punto de I, y f será una función que supondremos definida en $I \setminus \{a\}$ sin excluir la posibilidad de que dicha función pueda estar definida en todo el intervalo I lo cual, para nuestros propósitos actuales, carece de importancia.

Límite de una función en un punto. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** a y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Nótese que la existencia del límite es independiente de que f esté o no definida en a y, en caso de estarlo, del valor que f pueda tener en a. También debe advertirse que en la definición de la *igualdad* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, sólo intervienen *desigualdades*.
Es fácil probar que el límite de una función en un punto, si existe, es único. Una consecuencia inmediata de la definición dada es el siguiente resultado.

Proposición. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:
i) f es continua en a.
ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En la recta real es posible distinguir si nos acercamos “por la derecha” o “por la izquierda” a un punto. Ello conduce de forma natural a la consideración de los *límites laterales* que pasamos a definir.

Límites laterales de una función en un punto. Supongamos que:

A) El conjunto $\{x \in I : a < x\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la derecha* en a, si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} a < x < a + \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la derecha de f en a** y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\alpha$.

B) El conjunto $\{x\in I : x<a\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la izquierda* en a, si existe un número $\beta\in\mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+ \quad \exists\delta\in\mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} a-\delta<x<a \\ x\in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x)-\beta|<\varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la izquierda de f en a** y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\beta$.

Teniendo en cuenta las definiciones dadas, es inmediato que:

i) Si $a=\sup I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

ii) Si $a=\inf I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

   a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

   b) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=L$.

Funciones divergentes en un punto.

A) Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M\in\mathbb{R}^+ \quad \exists\delta\in\mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} 0<|x-a|<\delta \\ x\in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x)>M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

B) Se dice que f **es positivamente divergente por la izquierda** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M\in\mathbb{R}^+ \quad \exists\delta\in\mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} a-\delta<x<a \\ x\in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x)>M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty$.

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es positivamente divergente** por la derecha en a". Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$
- "f **es negativamente divergente** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- "f **es negativamente divergente por la izquierda o por la derecha** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$

Límites en infinito. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L\in\mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K\in\mathbb{R}^+ \ : \left.\begin{array}{c} x > K \\ x\in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** $+\infty$, y escribimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$.

Funciones divergentes en infinito. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K\in\mathbb{R}^+ \ : \left.\begin{array}{c} x > K \\ x\in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

En cuyo caso escribimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Llegados aquí, el lector no tendrá dificultad en precisar el significado de:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Discontinuidades. Álgebra de límites. Límites de funciones monótonas

Clasificación de las discontinuidades. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a\in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.

- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:

  $$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

  se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.

- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

Es evidente que el concepto de límite es, al igual que el de continuidad en un punto, un concepto local; la existencia del límite de una función en un punto a depende solamente del comportamiento de la función en los puntos próximos al punto a. Esto se pone de manifiesto en el siguiente resultado.

Teorema de localización para límites. Una función f tiene límite en un punto a si, y sólo si, la restricción, $f_{|I\cap J}$, donde J es un *intervalo abierto* que contiene a a, tiene límite en a, en cuyo caso, ambos límites coinciden.

Es importante advertir que el concepto de límite lateral es un caso particular del concepto general de límite de una función en un punto. Por ello, cualquier resultado referente a límites de funciones en un punto puede ser convenientemente enunciado para límites laterales sin más que considerar la restricción de la función a la derecha o a la izquierda del punto en cuestión.

El siguiente resultado pone de manifiesto la compatibilidad de la "operación de paso al límite" con la estructura algebraica y de orden de $\mathbb{R}$.

Teorema [Álgebra de límites] Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x)\,\lim_{x\to a} g(x)$$

ii) Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$

iii) Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x\in I$, $x\neq a$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$

iv) Supongamos que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I, x \neq a$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. Entonces se verifica que h tiene límite en a y $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.

En el siguiente resultado se considera que una de las funciones es divergente.

Condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto. Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

i) Supongamos que hay un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Envxnces $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$.

ii) Supongamos que hay un número $M > 0$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = +\infty$.

El siguiente resultado es muy útil.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero. Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, y que hay un número $M > 0$ tal que $|g(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = 2$.

Un resultado importante es el siguiente.

La continuidad permuta con el paso al límite. Si g es continua en el punto $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(L)$. Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to a} f(x))$$

Límites de exponenciales y logaritmos. En lo que sigue a puede ser un número real o $+\infty$ o $-\infty$. En los apartados b1), b2) y b3) se supone que $f(x) > 0$.

a1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to a} e^{f(x)} = e^L$.

a2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x \to a} e^{f(x)} = +\infty$.

a5) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x \to a} e^{f(x)} = 0$.

b1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0 \iff \lim\limits_{x \to a} \log f(x) = \log L$.

b2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = +\infty$.

b3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = -\infty$.

Indeterminaciones en el cálculo de límites.

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas que hemos visto anteriormente no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones $f+g$, fg, no está determinado por el de f y g. Por ejemplo, si sabemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, ¿qué podemos decir en general del comportamiento en el punto a de la función $f+g$? Respuesta: absolutamente nada. En consecuencia, para calcular un límite del tipo $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ donde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ *se requiere un estudio particular en cada caso*. Suele decirse que estos límites son **una indeterminación del tipo "$\infty-\infty$"**.

Análogamente, si sabemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y que la función g es divergente (positivamente o negativamente) en el punto a, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la función fg en dicho punto. Cuando esto ocurre se dice que el límite $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$ **es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$"**. Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos funciones divergentes o de dos funciones con límite cero, es decir, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$", pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

Todavía hemos de considerar nuevas indeterminaciones que van a surgir al considerar funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera. Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\log f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados anteriores, el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x)\log f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ (indeterminación "1^∞")

b) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "∞^0")

c) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "0^0")

Ni que decir tiene que no hay técnicas generales que permitan "resolver las indeterminaciones"; ¡no serían tales si las hubiera! Es por ello que, los límites indeterminados, requieren un estudio particular en cada caso. Es un hecho que la mayoría de los límites que tienen algún interés matemático son límites indeterminados. Cuando estudiemos las derivadas obtendremos técnicas que permitirán calcular con comodidad dichos límites.

Hemos dejado para final de este capítulo uno de los resultados más importantes que vamos a ver en este curso.

Teorema [Límites de una función monótona] Sea f una función creciente definida en un intervalo I.

i) Para todo punto $a\in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \sup\{f(x) : x\in I, x<a\}.$$
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \inf\{f(x) : x\in I, x>a\}.$$

ii) Si $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

a) Si f está minorada en I es $\lim_{x\to a} f(x) = \inf\{f(x) : x\in I\setminus\{a\}\}$.

b) Si f no está minorada en I es $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

iii) Si $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ es el extremo derecho de I, entonces:

a) Si f está mayorada en I es $\lim_{x\to a} f(x) = \sup\{f(x) : x\in I\setminus\{a\}\}$.

b) Si f no está mayorada en I es $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Demostración. Supongamos que $a\in I$ no es el extremo izquierdo de I, es decir que el conjunto $\{x\in I : x<a\}$ no es vacío. Entonces, el conjunto $B=\{f(x) : x\in I, x<a\}$ tampoco es vacío y, por ser f creciente, el número $f(a)$ es un mayorante de B. Sea $\alpha = \sup\{f(x) : x\in I, x<a\}$. Dado $\varepsilon>0$, el número $\alpha-\varepsilon$ no puede ser mayorante de B, es decir, tiene que haber algún punto $x_o\in I$, $x_o<a$ tal que $\alpha-\varepsilon < f(x_o)$. Sea $\delta = a - x_o > 0$. Entonces para

$a-\delta < x < a$, esto es, para $x_o < x < a$, se verifica que $\alpha-\varepsilon < f(x_o) \leqslant f(x) \leqslant \alpha$, lo que claramente implica que $\alpha-\varepsilon < f(x) < \alpha+\varepsilon$, es decir, $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \sup\{f(x) : x\in I,\, x<a\}$. Los demás casos se prueban de forma muy parecida y quedan como ejercicio para el lector.

Teorema [Discontinuidades de las funciones monótonas] Sea f una función monótona en un intervalo. Entonces:

i) En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo, f solamente puede tener discontinuidades de salto.

ii) Si el intervalo tiene máximo o mínimo, f puede tener en dichos puntos discontinuidades evitables.

Teorema [Continuidad de una función monótona] Una función monótona definida en un intervalo es continua si, y sólo si, su imagen es un intervalo.

Demostración. En efecto, si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente en un intervalo I y suponemos que su imagen $f(I)$ es un intervalo entonces, si $a\in I$ no es un punto extremo de I, es decir, hay puntos $u,v\in I$ tales que $u < a < v$, tenemos que

$$\{f(x) : x\in I,\, x<a\} \supset [f(u), f(a)[, \quad \{f(x) : x\in I,\, x>a\} \supset]f(a), f(v)]$$

y deducimos que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$, esto es, f es continua en a. Análogamente se prueba que si I contiene a alguno de sus extremos entonces f es continua también en esos puntos.

Teniendo en cuenta que la función inversa de una función estrictamente monótona es también estrictamente monótona (y del mismo tipo), se deduce de lo anterior el siguiente importante resultado.

Teorema. La función inversa de una función estrictamente monótona y continua en un intervalo es también una función continua y estrictamente monótona.

El siguiente resultado se demuestra haciendo uso del teorema de los ceros de Bolzano y será usado en el próximo capítulo para obtener una importante propiedad de las funciones con derivada distinta de cero. Su demostración no añade nada nuevo a lo que ya sabemos y por eso no la incluyo aquí; pero lo que se afirma en él es muy intuitivo: si una función es *continua e inyectiva en un intervalo* entonces es claro que *su gráfica no puede subir y bajar*, en consecuencia o siempre sube o siempre baja.

Teorema [Funciones continuas e inyectivas en intervalos] Una función continua e inyectiva definida en un intervalo es estrictamente monótona.